Теория устойчивости Ляпунова

Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918) — великий русский математик. Его классические работы по качественной теории дифференциальных уравнений, механике, математической физике и теории вероятностей принесли ему всемирное признание. Его теория устойчивости имеет бесчисленные применения в современных теоретических и прикладных исследованиях, ее влияние трудно переоценить.

Теорема Ляпунова об устойчивости

Напомним фундаментальную и очень элегантную теорему об устойчивости стационарного решения, в той или иной степени знакомую каждому изучавшему математику.

Движение точки $y \in \mathbb{R}^n$ со скоростью $F(y,t)$, зависящей от положения точки и от времени t, описывается дифференциальным уравнением

$$y' = F(y,t) \tag{1}$$

и положением y_0 точки y в начальный момент t_0.

Решение $y_0(t)$ уравнения (1) с начальным данным $y_0(t_0) = y_0$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если решение $y_1(t)$ с любым достаточно близким начальным данным y_1 в любой момент времени мало отличается от $y_0(t)$ (то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если $|y_1 - y_0| < \delta$, то $|y_1(t) - y_0(t)| < \varepsilon$ при $t > t_0$, где $y_1(t)$ обозначает решение с начальным данным $y_1(t_0) = y_1$).

Решение $y_0(t)$ называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и существует такое $\delta > 0$, что если $|y_1 - y_0| < \delta$, то $\lim\limits_{t\to\infty} y_1(t) - y_0(t) = 0$.

Ниже мы рассматриваем автономные дифференциальные уравнения $y' = F(y)$, для которых $F(0) = 0$, и обсуждаем вопрос об устойчивости стационарного решения $y_0(t) \equiv 0$ таких уравнений.

Пусть $\tilde{y}' = A\tilde{y}$ — линеаризация уравнения $y' = F(y)$ в неподвижной точке $y = 0$ (где A — дифференциал вектор-функции F в точке 0). Обозначим через $\Lambda(A)$ максимум вещественных частей собственных чисел дифференциала A.

Теорема Ляпунова. *Если $\Lambda(A) < 0$, то стационарное решение $y(t) \equiv 0$ уравнения $y' = F(y)$ асимптотически устойчиво. Если $\Lambda(A) > 0$, то стационарное решение неустойчиво по Ляпунову.*

Эта теорема почти всегда решает вопрос об устойчивости стационарного решения: она не работает лишь в исключительном случае $\Lambda(A) = 0$.

Теорема Ляпунова разбивает пространства полиномов Тейлора первой степени вектор-функции F, для которой $F(0) = 0$, на три множества:

1) устойчивое множество, определенное условием $\Lambda(A) < 0$, для которого независимо от остальных коэффициентов ряда Тейлора вектор-функции F стационарное решение устойчиво;

2) неустойчивое множество, определенное условием $\Lambda(A) > 0$, для которого независимо от остальных коэффициентов ряда Тейлора вектор-функции F стационарное решение неустойчиво;

3) нейтральное множество, определенное условием $\Lambda(A) = 0$, для которого устойчивость стационарного решения зависит от остальных коэффициентов ряда Тейлора вектор функции F.

Разбиение пространства 1-струй вектор-функций F на устойчивые, неустойчивые и нейтральные множества является полуалгебраическим: определить знак числа $\Lambda(A)$ можно, вычисляя значения конечного числа специальных полиномов от коэффициентов матрицы дифференциала A.

Относительная простота этого разбиения совершенно не означает, что вопрос об устойчивости прост. Аналогичное разбиение пространства k-струй вектор-функции F на устойчивые, неустойчивые и нейтральные множества при больших k чрезвычайно сложно (и заведомо не является полуалгебраическим).

Поэтому очень общий и относительно простой критерий устойчивости, найденный Ляпуновым, следует рассматривать как замечательный результат и редкую удачу. В 1892 году он опубликовал свой фундаментальный труд об общей задаче устойчивости движения. Сейчас теория устойчивости Ляпунова стала классической и входит в обязательную программу по математике в университетах всего мира.

Функция Ляпунова

Ляпунов нашел удивительно простое и гибкое доказательство своего критерия устойчивости.

Функция $G(y)$ называется *функцией Ляпунова* для динамической системы $y' = F(y)$, если при движении точки y по траектории динамической системы эта функция не возрастает, т. е. если $\dfrac{dG(y(t))}{dt} = \langle \nabla G, F \rangle \leqslant 0$, где ∇G — градиент функции G и $\langle v, w \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов v и w.

Для всякой константы C область $G \leqslant C$ инвариантна относительно динамической системы. Следовательно, если функция Ляпунова G имеет строгий локальный минимум в точке y_0, то $y(t) \equiv y_0$ является устойчивой по Ляпунову стационарной траекторией динамической системы. Если же дополнительно в некритических точках функции G выполняется строгое неравенство $\langle \nabla G, F \rangle < 0$, то это стационарное решение асимптотически устойчиво.

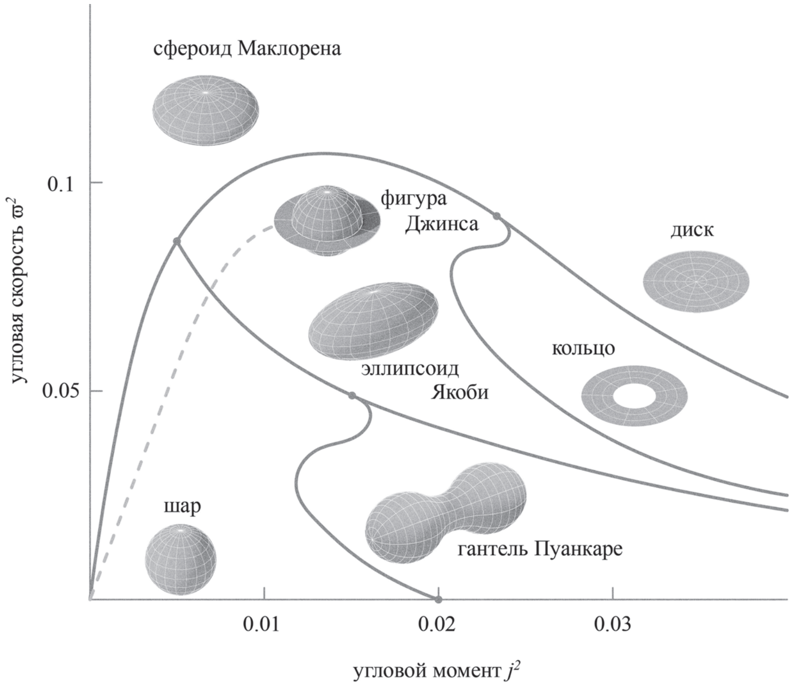
По дифференциалу A, для которого $\Lambda(A) < 0$, легко построить положительно определенную квадратичную форму, которая в окрестности точки нуль является функцией Ляпунова рассматриваемой системы. Из существования такой квадратичной формы сразу вытекает устойчивость по Ляпунову стационарного решения. Остальные утверждения теоремы проверяются столь же просто.

Представим себе механическую систему, энергия которой сохраняется или уменьшается со временем (например, из-за трения). Энергия является фунцией Ляпунова этой системы. Затухающие малые колебания такой механической системы около положения равновесия дают наглядное представление о динамике системы около устойчивого положения равновесия, описанного в теореме Ляпунова.

Задача Чебышёва

В этой части заметки использовалась статья В. А. Стеклова, ближайшего ученика А. М. Ляпунова, посвященная творчеству его учителя. Когда А. М. Ляпунов был начинающим математиком, он впервые занялся решением задачи П. Л. Чебышёва, которой занимался до последних дней жизни. Вот как сформулировал свою задачу Чебышёв.

> Известно, что жидкая однородная масса, частицы которой притягиваются по закону Ньютона и которая вращается равномерно вокруг некоторой оси, может сохранять форму эллипсоида, пока угловая скорость ω не превосходит некоторого предела.
>
> Для значений ω, бо́льших этого предела, эллипсоидальные фигуры равновесия становятся невозможными.
>
> Пусть ω — какое-либо значение угловой скорости, которой соответствует эллипсоид равновесия E. Дадим угловой скорости достаточно малое приращение ε. Спрашивается, существуют ли для угловой скорости $\omega + \varepsilon$ иные фигуры равновесия, отличные от эллипсоидальных, непрерывно изменяющиеся при таком же изменении ε и при $\varepsilon = 0$ совпадающие с эллипсоидом E?



Типы фигур равновесия в задаче Чебышёва [1]

Этот чрезвычайно сложный вопрос, связанный с задачей о возможных формах небесных тел, интересовал многих ученых.

Первый частичный результат, связанный с задачей Чебышёва, Ляпунов получил в своей магистерской диссертации в 1885 году.

Великий французский математик А. Пуанкаре тоже занимался этой задачей. Он исследовал первое приближение и на основе этого приближения к решению (без строгого доказательства и без оценки погрешности) пришел к выводу о существовании бесконечного числа различных форм равновесия, близких к эллипсоидам. Он не знал, что Ляпунов пришел к вполне аналогичным выводам за три года до этого. Результаты Пуанкаре рассматривались современниками как грандиозное достижение.

В 1901 году А. М. Ляпунов был избран действительным членом Академии наук и смог целиком посвятить себя научной деятельности. После этого он опубликовал ряд мемуаров, посвященных задаче Чебышёва, которые даже с чисто внешней стороны производят сильное впечатление: их объем составляет более 1000 страниц большого формата. Используя совершенно оригинальный подход, Ляпунов построил последовательные приближения любого порядка, доказал сходимость соответствующих рядов и тем самым получил полное решение задачи.

После трагической смерти А. М. Ляпунова осталась законченная рукопись объемом в 489 страниц, содержащая глубокие обобщения его опубликованных ранее результатов.

А. Г. Хованский

Литература

[1] *Холшевников К. В.* О фигурах равновесия небесных тел (к 150-летию А. М. Ляпунова // КИО. 2008. № 2. См. https://cyberleninka.ru/article/n/o-figurah-ravnovesiya-nebesnyh-tel-k-150-letiyu-a-m-lyapunova